

*filtracja optymalna Wienera, zastosowanie,
diagnostyka, przekładnie zębate,
uszkodzenia lokalne, detekcja*

Radosław ZIMROZ*

OPTYMALNA FILTRACJA SYGNAŁÓW I JEJ ZASTOSOWANIE W DIAGNOSTYCE PRZEKŁADNI ZĘBATYCH. CZĘŚĆ 1. PODSTAWY TEORETYCZNE

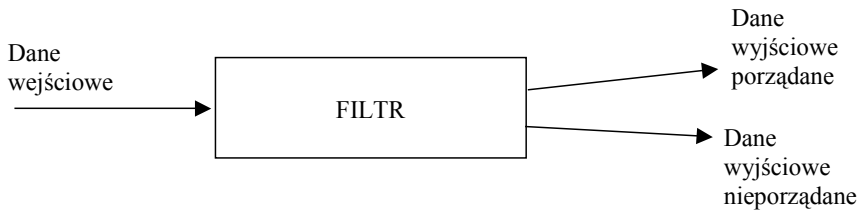
W pracy przedstawiono propozycję zastosowania filtracji optymalnej Wienera do ekstrakcji sygnału informacyjnego w diagnostyce uszkodzeń lokalnych w przekładniach zębatych. Praca składa się z dwóch części: teoretycznej, wyjaśniającej istotę podejścia zilustrowaną prostym przykładem symulacyjnym i implementacyjnej, w odniesieniu do sygnałów rzeczywistych. W pierwszej części pracy zdefiniowano problem, następnie omówiono koncepcję filtracji optymalnej wg Wienera. Na zakończenie pierwszej części rozważań przedstawiono ilustrację problemu odszumiania (filtracji optymalnej) dla prostego przykładu symulacyjnego. Analizy rzeczywistych sygnałów zarejestrowanych w czasie pracy przekładni przedstawia druga część pracy.

1. WPROWADZENIE

Problem filtracji i filtru jest obecny w życiu człowieka od tysięcy lat. W miarę rozwoju nauki i techniki oraz stawianych wymagań pojęcie filtracji i filtru odnosi się do wielu zagadnień. Ogólnie procedura (proces) filtracji dotyczy separacji (rozdzielenia) substancji, informacji itd. o pożądanym właściwościach od substancji, informacji itd. o niepożądanych właściwościach. Dane wejściowe stanowi mieszanina (w zależności od problemu mieszanina może mieć różny charakter) substancji, informacji itd. o pożądanym i niepożądanym właściwościach. W klasycznych zastosowaniach proces filtracji jest fizycznie realizowany za pomocą urządzenia określanego mianem filtru. W zależności od zastosowań może to być układ elektryczny, filtr optyczny, filtr mechaniczny itd.

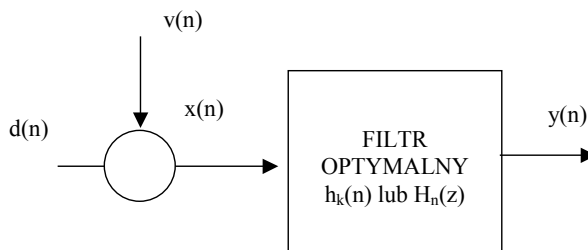
* Politechnika Wroclawska, Wydział Geoinżynierii, Górnictwa i Geologii, Instytut Górnictwa, pl. Teatralny 2, 50-051 Wrocław.

W technice zastosowanie filtrów jest bardzo szerokie (oczyszczanie wody, powietrza itd). Jeśli chodzi o „sygnałowe” znaczenie filtracji wiąże się to z odzyskiwaniem informacji zniekształconej (zaszumionej) w czasie transmisji przez medium lub przez inne źródła sygnałów stanowiących zakłócenie. W takim ujęciu filtr oznacza obwód elektryczny (układ) selektywny (przepuszczający lub tłumiący) w stosunku do pewnych składowych sygnału o określonych częstotliwościach.



Rys. 1. Ogólna koncepcja procesu filtracji
Fig. 1. General idea of filtration

Szczególnym przypadkiem filtru jest stosowany w przetwarzaniu sygnałów cyfrowych filtr cyfrowy, który w zasadzie nie jest urządzeniem, ale algorytmem (procedurą obliczeniową). Filtrem cyfrowym nazywamy algorytm realizowany przez program komputerowy lub cyfrowy układ sekwencyjny, który w reakcji na ciąg próbek sygnału dyskretnego podanego na swoje wejście odpowiada ciągiem próbek wyjściowych, zgodnie z deterministyczną funkcją przejścia, która może być liniowa lub nieliniowa.



Rys. 2. Model sygnałowy w filtracji
Fig. 2. Model of signals for filtering problem

W praktyce bardzo często w wyniku np. pomiarów wielkości fizycznych sygnał jest obciążony pewnym błędem spowodowanym występowaniem zakłóceń. Intuicyjnie celem filtracji jest takie przekształcenie sygnału zarejestrowanego $x(n)$ przy pomocy filtru $h(n)$ aby uzyskany sygnał $y(n)$ był jak najbardziej zbliżony do sygnału informacyjnego $d(n)$. Niestety wielokrotnie w filtracji sygnałów diagnostycznych taka operacja jest realizowana na podstawie wiedzy eksperta, metodą prób i błędów. „Diagnostyczne”

odniesienie do problemu filtracji to poszukiwanie niskoenergetycznego sygnału zawierającego informację o uszkodzeniu lokalnym. Jako „najlepsze” rozwiązanie w wielu pracach proponowano filtrację wokół jednej ze składowych o częstotliwości ząbienia (zwykle 2 lub 3 h) w paśmie $\pm 0,5$ częstotliwości ząbienia [1]. Przełomową okazała się propozycja Wanga [2], dotycząca demodulacji wokół rezonansu ząbienia, oraz prace Randalla i antoniego [4, 5, 8] dotyczące kurtozy widmowej. Pierwsze próby zastosowania kurtozy widmowej do diagnostyki elementów maszyn górniczych przedstawiono w pracy [6].

Combet i Gelman [7] analizowali problem filtracji optymalnej z uwzględnieniem różnych technik. Filtrację wykorzystującą kurtozę widmową stosuje z powodzeniem Barszcz [8] w odniesieniu do diagnostyki turbin wiatrowych.

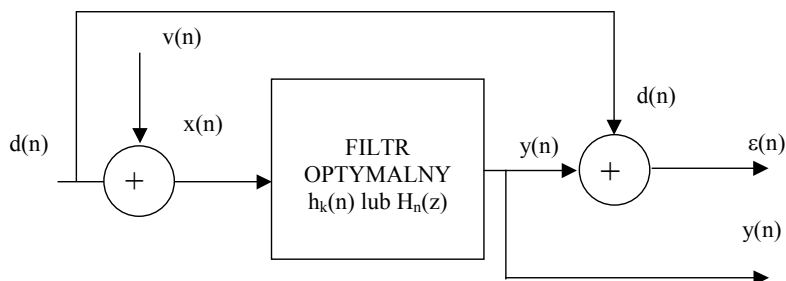
Na rysunku 2 pokazano sygnałowy model procesu filtracji: rejestrowany sygnał $x(n)$ jest mieszaniną sygnałów: $d(n)$ – sygnał informacyjny i $v(n)$ – zakłócenie (szum). Celem filtru jest odzyskanie informacji o sygnale $x(n)$. Sygnał na wyjściu $y(n)$ stanowi estymatę sygnału $d(n)$. W celu znalezienia rozwiązania optymalnego warto sięgnąć po rozwiązania zaproponowane przez Wienera [9] już w latach 40. XX wieku.

2. FILTRACJA OPTYMALNA. FILTR WIENERA

Zadaniem filtru Wienera jest odzyskanie pożądanego sygnału $d(n)$ z zaszumionej (zniekształconej) obserwacji (pomiaru) $x(n)$, rys. 3. Zakładając że $d(n)$ i $v(n)$ są sygnałami stacjonarnymi w szerszym sensie (słabostacjonarnymi) Wiener zaproponował podejście w projektowaniu właściwości filtru $h(n)$ tak aby estymowane $y(n)$ było obciążone jak najmniejszym błędem estymacji $e(n)$:

$$Q = \min(e(n)) \tag{1}$$

Najczęściej przyjmuje się minimum błędu w sensie średniokwadratowym (ang. MMSE – minimum mean square error):



Rys. 3. Ilustracja procesu filtracji w sensie Wienera
 Fig. 3. Illustration of filtering process in Wiener sense

Tak zdefiniowany problem może posłużyć do realizacji 4 podstawowych zadań w problematyce przetwarzania sygnałów:

- Filtracja – ekstrakcja sygnału użytecznego (informacji) w chwili t na podstawie danych zebranych do chwili t ,
- Wygładzanie – w procesie przetwarzania sygnału wejściowego na potrzeby wyznaczenia wartości próbki sygnału wyjściowego $Y(t)$ dysponujemy wartościami sygnału wejściowego X zebranymi także po czasie t . Dostępność takiej informacji zapewnia poprawę estymacji $Y(t)$ w porównaniu z filtracją,
- Predykcja – określenie wartości próbki $Y(t)$ na podstawie znajomości wartości sygnałów zarejestrowanych do chwili $t - 1$,
- Rozplatanie (dekonwolucja).

3. OPTYMALNA FILTRACJA WIENERA Z WYKORZYSTANIEM FILTRU TYPU FIR

W tej sekcji przeprowadzimy rozważania na temat możliwości estymacji wartości procesu $d(n)$ poprzez filtrację sygnału $x(n)$ z wykorzystaniem filtru Wienera o skończonej odpowiedzi impulsowej FIR.

Zakładając że $d(n)$ i $x(n)$ są procesami stacjonarnymi w szerszym sensie, są współzależne, oraz znane są ich funkcje autokorelacji $r_x(k)$ $r_d(k)$ oraz funkcja korelacji wzajemnej $r_{dx}(k)$ oraz że $h(n)$ jest odpowiedzią impulsową filtru cyfrowego o skończonej odpowiedzi rzędu $N - 1$ sygnał estymowany (odpowieź filtru $y(n)$ na pobudzenie sygnałem $x(n)$) można wyrazić następująco

$$y(n) = \hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n) \quad (2)$$

gdzie * oznacza operację splotu sygnałów

Uwaga:

Właściwości filtru można wyrazić na różne sposoby, np. jako odpowiedź na pobudzenie impulsowe $h(n)$ lub w dziedzinie zmiennej zespolonej „ z ” – jako efekt transformacji Z

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot z^{-n} \quad (3)$$

W dalszej części pracy te formy opisu filtru będą stosowane zamiennie.

Estymacja $\hat{d}(n)$ będzie optymalna jeśli wartość błędu będzie zminimalizowana

$$Q = \min(E[e^2(n)]) \quad (4)$$

gdzie E oznacza wartość oczekiwaną procesu.

Zagadnienie optymalizacyjne sprowadza się do wyznaczenia wektora współczynników

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, h_2 \dots h_{N-1}]^T \quad (5)$$

opisujących filtr $h(n)_{opt}$

Wyznaczenie „optymalnej” odpowiedzi impulsowej $h(n)_{opt}$ wiąże się z wyznaczeniem pochodnej z funkcji celu Q względem $h(n)$

$$\frac{\partial Q}{\partial h(k)} = \frac{\partial}{\partial h(k)} E[e^2(n)] \Rightarrow 0 \quad (6)$$

$$Q = E[e^2(n)] = E[(d(n) - y(n))^2] \quad (7)$$

podstawiając

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k) \quad (8)$$

uzyskujemy

$$Q = E[e^2(n)] = E[(d(n) - y(n))^2] = E\left[\left(d(n) - \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)\right)^2\right] \quad (9)$$

zamieniając sumę na zapis w postaci wektorowej

$$y(n) = \hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n) \quad (10)$$

gdzie

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, h_2 \dots h_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-N)]^T$$

uzyskujemy

$$\begin{aligned}
 Q &= E[(\mathbf{d}(n) - \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n))^2] = E[(\mathbf{d}^2(n)) - 2E[(\mathbf{d}(n)\mathbf{h}^T \mathbf{x}(n))] + E[(\mathbf{h}^T \mathbf{x}(n))^2]] \\
 &= E[(\mathbf{d}^2(n)) - 2\mathbf{h}^T E[(\mathbf{d}(n) \mathbf{x}(n))] + \mathbf{h}^T E[(\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n))]\mathbf{h}]
 \end{aligned} \quad (11)$$

biorąc pod uwagę że:

$$E[(\mathbf{d}(n) \mathbf{x}(n))] = \mathbf{r}_{dx}^{(n)} \quad (12)$$

$$E[(\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n))] = \mathbf{R}_{xx}^{(n)} \quad (13)$$

Ostatecznie uzyskujemy

$$Q = E[(\mathbf{d}^2(n)) - 2\mathbf{h}^T \mathbf{r}_{dx}^{(n)} + \mathbf{h}^T \mathbf{R}_{xx}^{(n)}\mathbf{h}] \quad (14)$$

Jak już wspomniano minimalizacja w sensie średniokwadratowym błędu estymacji sygnału $d(n)$ poprzez $y(n)$ polega na wyznaczeniu minimum funkcji Q poprzez wyznaczanie pochodnej względem zmiennej \mathbf{h} – innymi słowy na dobraniu takiego filtra opisanego poprzez wektor współczynników \mathbf{h} aby błąd estymacji był minimalny.

$$\frac{dQ}{d\mathbf{h}} = \frac{d}{d\mathbf{h}} \{E[(\mathbf{d}^2(n)) - 2\mathbf{h}^T \mathbf{r}_{dx}^{(n)} + \mathbf{h}^T \mathbf{R}_{xx}^{(n)}\mathbf{h}]\} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dQ}{d\mathbf{h}} = -2 \mathbf{r}_{dx}^{(n)} + 2\mathbf{R}_{xx}^{(n)}\mathbf{h} = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{R}_{xx}^{(n)}\mathbf{h} = \mathbf{r}_{dx}^{(n)} \quad (17)$$

Powyższe równanie określa się mianem równania Wienera Hopfa. $\mathbf{R}_{xx}^{(n)}$ jest macierzą autokorelacji Teoplitta sprzężoną hermitowsko o wymiarze $N \times N$, \mathbf{h} jest wektorem współczynników o długości N ($0 \dots N-1$), $\mathbf{r}_{dx}^{(n)}$ jest wektorem korelacji wzajemnej pomiędzy sygnałami $d(n)$ i $x(n)$

Wektor współczynników opisujących optymalny filtr Wienera wyraża się jako

$$\mathbf{H} = [\mathbf{R}_{xx}^{(n)}]^{-1} \mathbf{r}_{dx}^{(n)} \quad (18)$$

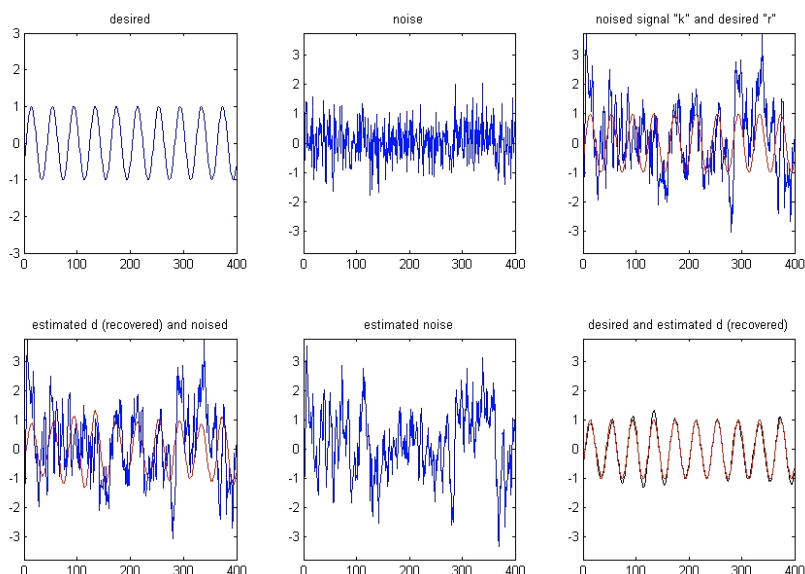
powracając do zapisu macierzowego

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx}^{(n)}(0) & r_{xx}^{(n)}(1) & \cdots & r_{xx}^{(n)}(N) \\ r_{xx}^{(n)}(1) & r_{xx}^{(n)}(0) & \cdots & r_{xx}^{(n)}(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}^{(n)}(N) & r_{xx}^{(n)}(N-1) & \cdots & r_{xx}^{(n)}(0) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_{dx}^{(n)}(0) \\ r_{dx}^{(n)}(1) \\ \vdots \\ r_{dx}^{(n)}(N) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Znajomość **macierzy korelacji własnej sygnału wejściowego dla n -tej próbki** $[R_{xx}^{(n)}]$ oraz **wektora korelacji wzajemnej** $[r_{dx}^{(n)}]$ pomiędzy wektorami $d(n)$ i $x(n)$ pozwala zdefiniować współczynniki optymalnego filtru.

4. WYNIKI SYMULACJI

W ramach eksperymentów symulacyjnych badano zdolność do odzyskania sygnału informacyjnego (dla uproszczenia sinusoida) na podstawie zaszumionej obserwacji. Na rysunku 4 przedstawiono symulowane sygnały: informacyjny, szum, sumę sygnału informacyjnego i szumu jako przykład realizacji pomiarowej (obserwacji) oraz wyniki filtracji: porównanie estymowanego i zaszumionego sygnału oraz porównanie sygnału estymowanego z oryginalną informacją. Zastosowany sygnał informacyjny jest bardzo prosty. Wybór postaci sygnału nie był przypadkowy, chodzi o szybkie interpretowanie wyników filtracji. W drugiej części pracy zastosowane zostaną sygnały rzeczywiste o znacznie bardziej skomplikowanej strukturze.



Rys. 4. Wyniki symulacji: sygnały: informacyjny (a), szum (b), suma sygnału informacyjnego i szumu jako przykład realizacji pomiarowej (obserwacji) (c) oraz wyniki filtracji: porównanie estymowanego i zaszumionego sygnału (d), przebieg odfiltrowanego szumu (błąd adaptacji), (e) porównanie sygnału estymowanego z oryginalną informacją (f)

Fig. 4. Results of simulation: signals: informative (a), noise (b), sum of a and b as an example of observation (c) and results of filtering: comparison of SOI estimation and noisy signal (d), prediction error (recovered noise) (e), comparison of estimated SOI and original SOI (f)

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono problem filtracji optymalnej w ujęciu zaproponowanym przez Wienera. Zaproponowano zastosowanie filtracji optymalnej do problemu ekstrakcji sygnału informacyjnego w diagnostyce uszkodzeń lokalnych. W pierwszej części omówiono podstawy teoretyczne i przedstawiono prosty przykład symulacyjny pokazujący jakość uzyskiwanych wyników filtracji.

LITERATURA

- [1] MĄCZAK J., *Wykorzystanie zjawiska modulacji sygnału wibroakustycznego w diagnozowaniu przekładni o zębach śrubowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1998.
- [2] WANG W., *Early detection of gear tooth cracking using resonance demodulation technique*, Mechanical Systems and Signal Processing, 15(5), 2001, 887–903.
- [3] BARSZCZ T., RANDALL R.B., *Application of spectral kurtosis for detection of a tooth crack in the planetary gear of a wind turbine*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 23, Issue 4, May 2009, 1352–1365.
- [4] ANTONI J. and RANDALL R.B., *The spectral kurtosis: application to the vibratory surveillance and diagnostics of rotating machines*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 20, Issue 2, February 2006, 308–331.
- [5] SAWALHI N., RANDALL R.B., ENDO H., *The enhancement of fault detection and diagnosis in rolling element bearings using minimum entropy deconvolution combined with spectral kurtosis*, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 21, Issue 6, August 2007, 2616–2633.
- [6] BARTELMUS W., ZIMROZ R., *Optymalny zakres częstotliwości w procedurze demodulacji amplitudy w zastosowaniu do uszkodzeń lokalnych*, Diagnostyka (Warszawa), 2006 nr 1, s. 141–150, 2006.
- [7] COMBET F., GELMAN L., *Optimal filtering of gear signals for early damage detection based on the spectral kurtosis*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 23, Issue 3, April 2009, 652–668.
- [8] BARSZCZ T., RANDALL R.B., *Application of spectral kurtosis for detection of a tooth crack in the planetary gear of a wind turbine*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 23, Issue 4, May 2009, 1352–1365.
- [9] WIENER N., *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, MIT Press (1930/1949).

OPTIMAL FILTERING OF SIGNALS AND ITS APPLICATION TO DIAGNOSTICS OF GEARBOXES. PART 1. THEORETICAL BACKGROUND

An introduction to optimal Wiener filtering and its application to condition monitoring of local damages in gearboxes is given in the paper. This work consists of two parts: in the first part the idea of optimal filtering proposed by Wiener is discussed and simple illustration by simulation is provided. The second part shows obstacles of Wiener approach, however his concept of optimization of filter is still useful. It has been show that spectral kurtosis and Wiener IIR filter are the same. As an illustration of practical application of optimal filter to local damage detection results obtained for planetary gearboxes used in mining industry are showed.