

*filtracja optymalna Wienera, zastosowanie
diagnostyka, przekładnie zębate,
uszkodzenia lokalne, detekcja*

Radosław ZIMROZ*

OPTYMALNA FILTRACJA SYGNAŁÓW I JEJ ZASTOSOWANIE W DIAGNOSTYCE PRZEKŁADNI ZĘBATYCH. CZĘŚĆ 2. WYNIKI ANALIZY SYGNAŁÓW RZECZYWISTYCH

W pracy przedstawiono propozycję zastosowania filtracji optymalnej Wienera do ekstrakcji sygnału informacyjnego w diagnostyce uszkodzeń lokalnych w przekładniach zębatych. Praca składa się z dwóch części: teoretycznej i implementacyjnej w odniesieniu do sygnałów rzeczywistych. W pierwszej części pracy zdefiniowano problem, następnie omówiono koncepcję filtracji optymalnej wg Wienera. Na zakończenie pierwszej części rozważań przedstawiono ilustrację problemu odsumiania (filtracji optymalnej) dla prostego przykładu symulacyjnego. Analizy rzeczywistych sygnałów zarejestrowanych w czasie pracy przekładni planetarnej przedstawia druga część pracy.

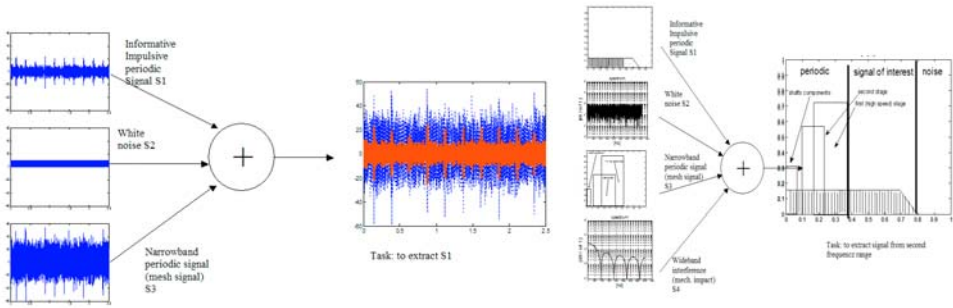
1. WPROWADZENIE

W pracy [1] przedstawiono znaczenie filtracji w diagnostyce uszkodzeń lokalnych w przekładniach zębatych i propozycję optymalizacji filtracji z wykorzystaniem podejścia zaproponowanego przez Wienera [2].

W przypadku diagnozowania uszkodzeń lokalnych, sygnał drganiowy rejestrowany na obudowie przekładni często modelowany jest jako mieszanina sygnału informacyjnego, szumu oraz wysokoenergetycznych zakłóceń o charakterze deterministycznym. Model ten stanowi daleko idące uproszczenie, co wykazano w pracy [3] ale na potrzeby obecnych rozważań wystarczający.

* Politechnika Wroclawska, Wydział Geoinżynierii, Górnictwa i Geologii, Instytut Górnictwa, pl. Teatralny 2, 50-051 Wrocław.

Spróbujmy podejść do problemu wykorzystując wiedzę o właściwościach sygnałów w dziedzinie częstotliwości. Intuicyjnie, chodzi o to, aby te zakresy częstotliwości, w których sygnał informacyjny jest zdominowany przez zakłócenia lub szum wytłumić, a tam gdzie sygnał informacyjny posiada większą energię niż pozostałe źródła zachować. Jako kryterium „rozpoznawania” sygnału informacyjnego zwykle wykorzystuje się kurtozę. Zastosowanie wprost podejścia opisanego w pracy [1] nie jest możliwe, ale koncepcja filtracji optymalnej Wienera jest dalej aktualna. Tym razem wykorzystamy koncepcję filtru opisanego w dziedzinie częstotliwości.



Rys. 1. Model sygnału i jego charakterystyki widmowe
Fig. 1. Model of signal and its spectral content

2. FILTRACJA OPTYMALNA WIENERA Z WYKROZYSTANIEM FILTRU IIR

Zadaniem filtru Wienera jest odzyskanie pożądanego sygnału $d(n)$ z zaszumionej (zniekształconej) obserwacji (pomiaru) $x(n)$ na podstawie znajomości pewnych charakterystyk sygnałów. Optymalne (w sensie średniokwadratowym) parametry (współczynniki) filtru zapewniające najlepszy z możliwych wynik filtracji, czyli wektor współczynników opisujących optymalny filtr Wienera wyraża się jako:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{R}_{xx}^{(n)}]^{-1} \mathbf{r}_{dx}^{(n)} \quad (1)$$

lub w zapisie macierzowym

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx}^{(n)}(0) & r_{xx}^{(n)}(1) & \cdots & r_{xx}^{(n)}(N) \\ r_{xx}^{(n)}(1) & r_{xx}^{(n)}(0) & \cdots & r_{xx}^{(n)}(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}^{(n)}(N) & r_{xx}^{(n)}(N-1) & \cdots & r_{xx}^{(n)}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{dx}^{(n)}(0) \\ r_{dx}^{(n)}(1) \\ \vdots \\ r_{dx}^{(n)}(N) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Niestety, w celu optymalnego odfiltrowania sygnału wymagana jest znajomość **macierzy korelacji własnej sygnału wejściowego dla n-tej próbki $\mathbf{R}_{xx}^{(n)}$** oraz **wektora korelacji wzajemnej $\mathbf{r}_{dx}^{(n)}$** pomiędzy wektorami $d(n)$ i $x(n)$ co nie zawsze jest możliwe. W przypadku diagnostyki uszkodzeń lokalnych, stan rozwoju uszkodzenia oraz obciążenie zewnętrzne silnie wpływają na postać sygnału informacyjnego. Generalnie postać sygnału $d(n)$ nie jest znana, wiadomo tylko że sygnał jest niskoenergetyczny, cykliczny (okresowy) i impulsowy. Praktyczne wykorzystanie modelu opisanego w pracy [1] jest ograniczone, ale jest podstawą do „nowej filozofii” ekstrakcji sygnału informacyjnego.

Sformułowanie zagadnienia optymalnej filtracji (estymacji) sygnału $d(n)$ na podstawie zniekształconego sygnału wejściowego $x(n)$ za pomocą filtru typu IIR (filtru o nieskończonej odpowiedzi impulsowej) jest takie samo jak dla filtru o skończonej odpowiedzi impulsowej FIR. Tożsamość koncepcji nie oznacza jednak tego samego rozwiązania problemu. W przeciwieństwie do przypadku opisanego w poprzedniej części, gdzie zadanie sprowadzało się do wyznaczenia N elementowego wektora współczynników filtru rzędu $N - 1$, w przypadku filtru o nieskończonej odpowiedzi impulsowej liczba niewiadomych, tj długość wektora jest nieskończona. Charakterystyka poszukiwanego filtru może być przedstawiona jako

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n} \quad (3)$$

Tak jak dla filtru FIR, estymacja $\hat{d}(n)$ będzie optymalna, jeśli wartość błędu będzie zminimalizowana

$$Q = \min(E\{|e(n)|^2\}) \quad (4)$$

$$Q = E\{|e(n)|^2\} = E\{|(d(n) - y(n))|^2\} \quad (5)$$

odpowiedź na pobudzenie $x(n)$ jest opisana wzorem

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n - k) \quad (6)$$

po podstawieniu

$$Q = E\left\{\left|(d(n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n - k))\right|^2\right\} \quad (7)$$

w celu znalezienia optymalnych wartości współczynników filtru minimalizujących błąd estymacji należy wyznaczyć pochodną funkcji Q i przyrównać do zera. Wypro-

wadzenie równania Wienera Hopfa zostanie pominięte ze względu na duże analogie do podejścia pokazanego w pracy [1]. Wynik przekształceń matematycznych mających na celu znalezienie optymalnych współczynników filtra wyrażony jest jako

$$r_{dx}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) r_x(k-l) \quad (8)$$

powyższe równanie jest nazywane równaniem Wienera Hopfa dla nieprzyczynowego filtra Wienera o nieskończonej odpowiedzi impulsowej i można je przedstawić w postaci splotu:

$$h(k) * r_x(k) = r_{dx}(k) \quad (9)$$

Poddając powyższą zależność transformacji Fouriera uzyskujemy zależność w dziedzinie częstotliwości

$$H(e^{j\omega})P_x(e^{j\omega}) = P_{dx}(e^{j\omega}) \quad (10)$$

zatem charakterystyka częstotliwościowa filtra wyraża się następująco:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{P_{dx}(e^{j\omega})}{P_x(e^{j\omega})} \quad (11)$$

Rozważmy ponownie sygnał (obserwację) będący sumą sygnału użytecznego $d(n)$ i szumu $v(n)$:

$$x(n) = d(n) + v(n) \quad (12)$$

zakładając że $d(n)$ i $v(n)$ są procesami nieskorelowanymi o zerowej średniej (scentrowanymi) funkcja autokorelacji przyjmuje postać:

$$r_x(k) = r_d(k) + r_v(k) \quad (13)$$

zatem po transformacji Fouriera

$$P_x(e^{j\omega}) = P_d(e^{j\omega}) + P_v(e^{j\omega}) \quad (14)$$

funkcja korelacji wzajemnej dla sygnałów $d(n)$ i $x(n)$ wynosi

$$r_{dx}(k) = E[d(n)x^*(n-k)] \quad (15)$$

podstawiając za $x(n) = d(n) + v(n)$ uzyskujemy

$$\begin{aligned} r_{dx}(k) &= E[d(n)x^*(n-k)] = E[d(n)(d^*(n-k) + v^*(n-k))] \\ &= E[d(n)d^*(n-k) + d(n)v^*(n-k)] \end{aligned} \quad (16)$$

co prowadzi do

$$r_{dx}(k) = r_{dd}(k) + r_{dv}(k) \quad (17)$$

jeśli $r_{dv}(k) \Rightarrow 0$ bo sygnały $d(n)$ i $v(n)$ są niezależne zatem $r_{dd}(k) \Rightarrow r_d(k)$
Ostatecznie uzyskujemy

$$r_{dx}(k) = r_d(k) \quad (18)$$

a relacja pomiędzy funkcjami widmowej gęstości mocy upraszcza się do:

$$P_{dx}(e^{j\omega}) = P_d(e^{j\omega}) \quad (19)$$

zatem

$$H(e^{j\omega}) = \frac{P_d(e^{j\omega})}{P_d(e^{j\omega}) + P_v(e^{j\omega})} \quad (20)$$

co oznacza że dla wartości ω dla których

$$P_d(e^{j\omega}) \gg P_v(e^{j\omega}) \Rightarrow |H(e^{j\omega})| \approx 1 \quad (21)$$

$$P_d(e^{j\omega}) \ll P_v(e^{j\omega}) \Rightarrow |H(e^{j\omega})| \approx 0 \quad (22)$$

3. OPTYMALNY FILTR WIENERA W OPARCIU O KURTOŻĘ WIDMOWĄ (WEDŁUG [4, 8])

Jak już wspomniano, pełna informacja o sygnale (tj. jego funkcja autokorelacji czy korelacje wzajemne) nie jest dostępna ale pewne charakterystyczne cechy sygnału są znane. Pożądanym sygnałem na wyjściu optymalnego filtru jest sygnał impulsowy. Podstawą do identyfikacji takiego sygnału może być kurtoza. Kurtoza to parametr opisujący parametry procesu losowego przedstawionego w postaci histogramu. Kurtoza jest miarą spłaszczenia rozkładu, wystąpienie impulsów w sygnale a zatem wartości skrajnych (względem średniej) o dowolnym znaku powoduje gwałtowny wzrost wartości kurtozy. Niestety sygnał informacyjny jest maskowany przez zakłócenia o wielokrotnie wyższych amplitudach zatem wyznaczanie kurtozy bezpośrednio z sygnału w dziedzinie czasu jest nieuzasadnione. Na potrzeby diagnostyki uszkodzeń lokalnych Antoni i Randall [4] zaproponowali rozszerzenie pojęcia kurtozy do tzw. kurtozy widmowej (ang. *spectral kurtosis*, *SK*). Idea jest dokładnie taka sama ale kurtoza wyznaczana jest wielokrotnie dla sygnału odfiltrowanego filtrem pasmowo-przepustowym o różnych częstotliwościach środkowych tak, aby przy zadanej rozdzielczości częstotliwościowej (szerokości pasma) wyznaczyć rozkład kurtozy w funkcji częstotliwości.

Kurtoza widmowa jest zdefiniowana jako unormowany moment czwartego rzędu

$$Kx(f) = \frac{S_{4,x}(f)}{S_{2,x}(f)^2} - 2 \quad (23)$$

$$S_{n,x}(f) = \left\langle |X(t, f)|^n \right\rangle \quad (24)$$

$\langle \rangle$ oznacza operator uśredniania, $X(t, f)$ zespolona obwiednia sygnału $x(t)$, $X(t, f)$ może być wyznaczone na podstawie krótkoterminowej Transformaty Fouriera STFT:

$$X(t, f) = \sum_{n=t}^{t+N_w-1} h(n-t)x(n)e^{-j2\pi fn} \quad (25)$$

gdzie $h(t)$ oznacza okno o długości N_w .

SK może być interpretowana jako miara zmienności energii sygnału w czasie wyrażonej na mapie spektrogramu dla poszczególnych częstotliwości f . SK może być także wykorzystana jako miara niestacjonarności sygnału która może być podstawą do zaprojektowania filtru do separacji niestacjonarnego, impulsowego sygnału $s(t)$ i gaussowskiego sygnału $n(t)$

$$K_x(f) = \frac{S_{4,x}\{s(t) + n(t)\}}{S_{2,x}\{s(t) + n(t)\}} = \frac{S_{4,x}\{s(t)\}}{S_{2,x}\{s(t)\} + S_{2,x}\{n(t)\}} \quad (26)$$

Kurtoza jest niewrażliwa na sygnał stacjonarny, gaussowski zatem $S_{4,x}\{n(t)\} = 0$. Po prostym przekształceniu uzyskujemy:

$$K_x(f) = \frac{K_s(f)}{[1 + \rho(f)]^2} \quad (27)$$

gdzie

$$\rho(f) = \frac{S_n(f)}{S_s(f)} \quad (28)$$

oznacza iloraz widmowej gęstości mocy sygnałów $n(t)$ i $s(t)$, zatem reprezentuje lokalny stosunek sygnału do szumu dla poszczególnych częstotliwości f . Biorąc pod uwagę, że filtr Wienera jest zdefiniowany wg równania (20) proste przekształcenie prowadzi do:

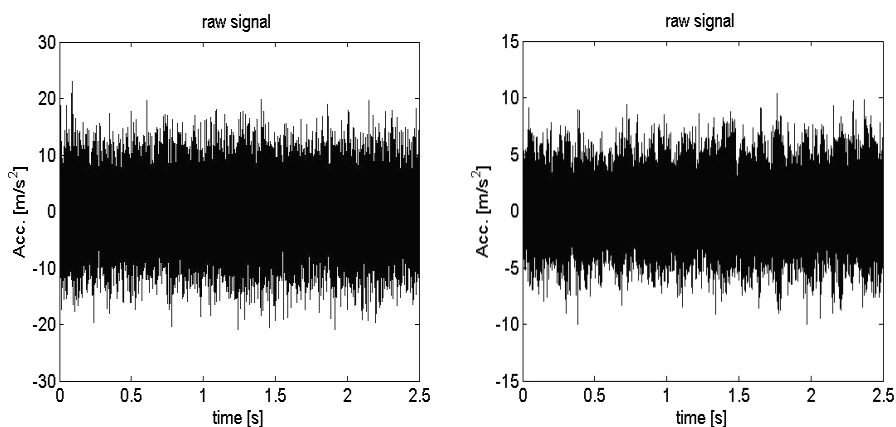
$$H(e^{j\omega}) = \frac{P_d(e^{j\omega}) / P_d(e^{j\omega})}{P_d(e^{j\omega}) / P_d(e^{j\omega}) + P_v(e^{j\omega}) / P_d(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \rho(f)} \quad (29)$$

gdzie $\rho(f) = P_v(e^{j\omega}) / P_d(e^{j\omega})$.

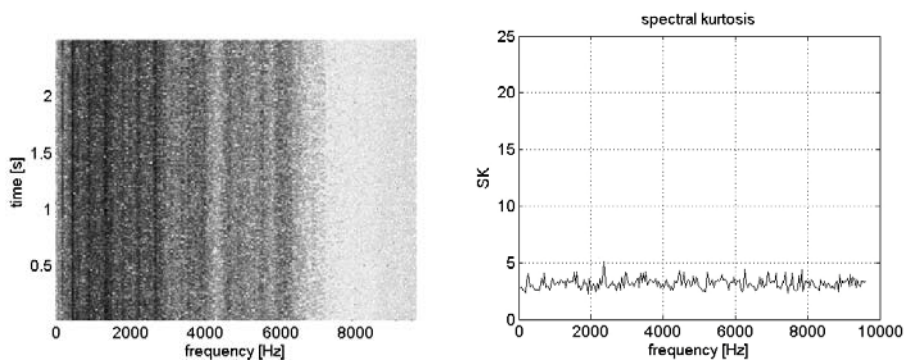
można powiedzieć, że filtr Wienera $H(f)$ jest proporcjonalny do SK . Filtr poszukujący sygnału impulsowego wg powyższych rozważań jest optymalny. Inne przykłady zastosowań kurtozy widmowej można znaleźć w pracach Combet [6] oraz Barszcza [7].

4. WYNIKI ANALIZ SYGNAŁÓW RZECZYWISTYCH

Analizy przeprowadzono dla dwóch przypadków: dla sygnału przekładni planetarnej, w której wykryto charakterystyczne impulsowe zaburzenia w sygnale, będące oznaką nieprawidłowej pracy jarzma, oraz dla sygnału z przekładni w stanie dobrym.

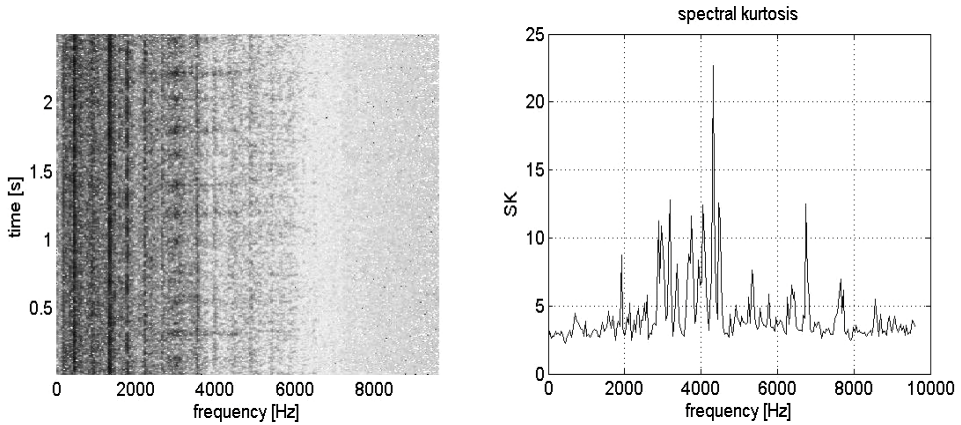


Rys. 2. Sygnały oryginalne: a) przekładnia planetarna w stanie dobrym, b) przekładnia uszkodzona
 Fig. 2. Raw signals: a) planetary gearbox In good condition, b) gearbox with fault

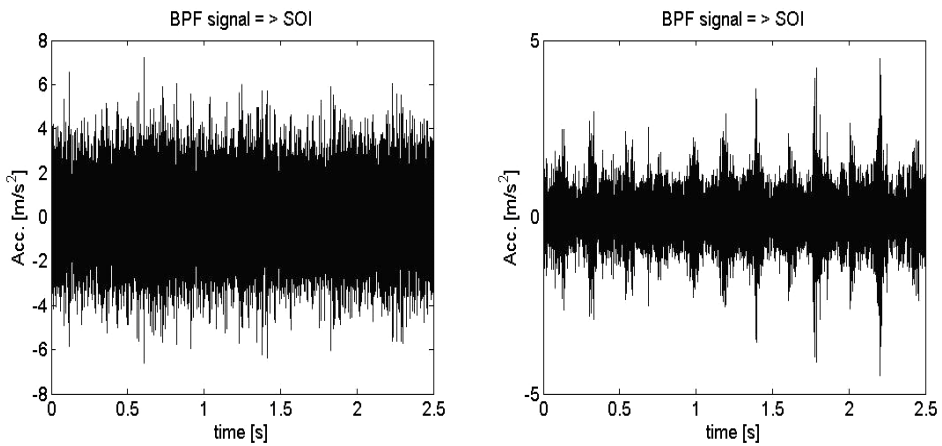


Rys. 3. a) Mapa czasowo częstotliwościowa dla sygnału przekładni planetarnej w stanie dobrym, b) kurtoza widmowa

Fig. 3. a) Time-frequency map for vibration signal from undamaged gearbox, b) Spectral kurtosis



Rys. 4. a) Mapa czasowo częstotliwościowa dla sygnału z uszkodzonej przekładni planetarnej, b) kurioza
 Fig. 4. a) Time-frequency map for vibration signal from damaged gearbox, b) Spectral kurtosis



Rys. 5. Sygnały odfiltrowane w oparciu o SK a)przekładnia planetarna w stanie dobrym
 b) przekładnia planetarna uszkodzona

Fig. 5. Signals after SK based filtering a) good conditon b) with damage

Na rysunku 2 pokazano sygnały z przekładni w stanie dobrym i nieprawidłowym. W obu przypadkach trudno wyodrębnić jakiegokolwiek cykliczne zaburzenia o charakterze impulsowym. Rysunki 3 oraz 4 przedstawiają mapę czasowo-częstotliwościową oraz wyznaczoną kurtozę widmową dla przekładni w stanie dobrym i przekładni w stanie nieprawidłowym. Rysunek 5 przedstawia wynik filtracji dla przekładni w stanie dobrym i przekładni w stanie nieprawidłowym. Rysu-

nek 5b pozwala zidentyfikować cykliczne zaburzenia o charakterze impulsowym będące oznaką niesprawności.

4. WNIOSKI

W pracy przedstawiono problem filtracji optymalnej w ujęciu zaproponowanym przez Wienera. Zaproponowano zastosowanie filtracji optymalnej do problemu ekstrakcji sygnału informacyjnego w diagnostyce uszkodzeń lokalnych. Jako podstawę do budowy filtru wykorzystano kurtozę widmową. Analizie poddano sygnały z przekładni planetarnych. Jedna z przekładni w stanie prawidłowym, druga wykazywała niestabilną pracę jarzma z charakterystycznymi impulsami występującymi w cyklu jarzma. Zadanie badawcze polegało na optymalnym odfiltrowaniu impulsowego sygnału informacyjnego. Zastosowana procedura pozwala wyodrębnić sygnał informacyjny, na podstawie którego można przeprowadzić dalszą procedurę rozpoznawania uszkodzenia. Nie jest to celem tej pracy. Diagnostowanie uszkodzenia bez ekstrakcji sygnału informacyjnego jest dość trudne ze względu na niekorzystny stosunek amplitud sygnału stanowiącego zakłócenia i sygnału informacyjnego.

LITERATURA

- [1] ZIMROZ R., *Optymalna filtracja sygnałów i jej zastosowanie w diagnostyce przekładni zębatych: cz. 1. Podstawy teoretyczne*, Zeszyty Naukowe Instytutu Górnictwa Politechniki Wrocławskiej 2009.
- [2] WIENER N., *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, MIT Press (1930/1949).
- [3] BARTELMUS W., ZIMROZ R., *Wykrywanie uszkodzeń lokalnych w układach napędowych maszyn górniczych – wybrane zagadnienia*, Materiały konferencyjne Diagnostyka Maszyn, Węgierska Górka 2008.
- [4] ANTONI J., RANDALL R.B., *The spectral kurtosis: application to the vibratory surveillance and diagnostics of rotating machines*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 20, Iss. 2, February 2006, 308–331.
- [5] SAWALHI N., RANDALL R.B., ENDO H., *The enhancement of fault detection and diagnosis in rolling element bearings using minimum entropy deconvolution combined with spectral kurtosis*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 21, Iss. 6, August 2007, 2616–2633.
- [6] COMBET F., GELMAN L., *Optimal filtering of gear signals for early damage detection based on the spectral kurtosis* Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 23, Iss. 3, April 2009, 652–668.
- [7] BARSZCZ T., RANDALL R.B., *Application of spectral kurtosis for detection of a tooth crack in the planetary gear of a wind turbine* Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 23, Iss. 4, May 2009, 1352–1365.
- [8] BARTELMUS W., ZIMROZ R., *Vibration condition monitoring of planetary gearbox under random varying* Mechanical Systems and Signal Processing, 23 (2009), 246–257.

OPTIMAL FILTERING OF SIGNALS AND ITS APPLICATION
TO DIAGNOSTICS OF GEARBOXES.
PART 2. RESULTS OF REAL VIBRATION SIGNAL PROCESSING

An introduction to optimal Wiener filtering and its application to condition monitoring of local damages in gearboxes is given in the paper. This work consists of two parts: in the first part the idea of optimal filtering proposed by Wiener is discussed and simple illustration by simulation is provided. The second part shows obstacles of Wiener approach, however his concept of optimization of filter is still useful. It has been shown that spectral kurtosis and Wiener IIR filter are the same. As an illustration of practical application of optimal filter to local damage detection results obtained for planetary gearboxes used in mining industry are shown.