

Jerzy MALEWSKI¹

O FRAKTALNEJ NATURZE GEOTECHNOLOGII

Przedstawiono fraktalną interpretację struktury technologii surowcowych nazwanych ogólnie geotechnologią. Pokazano efekt rozwoju takich technologii przez powielenie elementarnej zasady separacji składników w kolejnych stadiach procesu technologicznego. Systemy operacji w każdym stadium lub etapie rozwoju technologii są podobne, a więc posiadają podstawową cechę fraktali - samopodobieństwo. Podano wiele przykładów takiego podobieństwa mierzonego różnymi miarami - ekonomicznymi, technologicznymi, geometrycznymi. Przedstawiono również model informacyjny fraktala technologicznego i jego podstawowe zmienne i parametry.

WSTĘP

Termin *geotechnologia*, jak podaje słownik PWN, a za nim różne obiegowe źródła², jest „nauką o zagadnieniach geologii, górnictwa, geochemii”. Państwowy Instytut Geologiczny w swoim projekcie pod nazwą *geotechnologie* wyróżnia zagadnienia: „modelowanie obiektów i procesów geologicznych, systemy monitoringowe, tomografia geofizyczna, metody teledetekcyjne, metody obrazowania danych geologicznych”. Z kolei geografowie stosują to pojęcie do zagadnień GIS, GPS, RS (Urbański 2012).

Kolejne liczne grupy użytkowników przypisujące swojej specjalności pojęcie *geotechnologia* należą do przedstawicieli budownictwa, geotechniki, ochrony środowiska, chemii³. Jest to zaledwie kilka przykładów niewłaściwego - jak się zdaje - użycia tego terminu do charakteru swojej działalności. Tymczasem Europejska Agencja Środowiska (EEA) dyscyplinę tę definiuje jako „zastosowanie metod naukowych i techniki

¹Politechnika Wroclawska, Instytut Górnictwa, Wyb. Wyspiańskiego 50-370 Wrocław

² Np. <http://www.omegawiki.org/Expression:geotechnologia>.

³ Np.: „gałąź wiedzy, w skład której wchodzi zagadnienia z geologii, górnictwa, geochemii i technologii chemicznej”, <http://pl.glosbe.com/pl/de/geotechnologia>

inżynierskiej do eksploatacji i wykorzystania zasobów naturalnych”⁴. A więc właściwy obszar stosowania tego terminu powinien należeć do szeroko pojętego górnictwa, przeróbki kopalni, przetwórstwa/produkcji surowców mineralnych, które stosują te metody do eksploatacji i wykorzystania zasobów, a nie ich opisu. W takim też znaczeniu będzie on dalej używany w tym artykule.

Fraktalne struktury są powszechne w przyrodzie, choć być może niewielu z nas dostrzega je w swoim otoczeniu lub poznaniu. Możemy je zaobserwować w różnych figurach geometrycznych albo procesach życiowych lub twórczych, które pozornie są chaotyczne, ale przy odrobinie wyobraźni możemy dostrzec w nich pewien ład, który może być ujęty nawet w sposób ścisły na gruncie matematyki. Przykłady w przyrodzie to kształt linii brzegowej kontynentu, sieć hydrologiczna, szorstkość powierzchni przełomu skały, kształt ziarn ciał kruchych, kształt ścieżki błędzenia przypadkowego, struktura rośliny, kształt błyskawicy i temu podobne. zjawiska i konstrukcje wizualne.

Fraktale wyobrażamy lub widzimy jako obiekty geometryczne, ale mogą one być np. procesami, algorytmami, programami, na co łatwo znaleźć przykłady w informatyce (bazy danych, programy, procedury rekurencyjne). Z powodu wielkiej różnorodności przykładów matematycy obecnie unikają podawania ścisłej definicji i proponują określać fraktal jako zbiór, który (Wikipedia,2012):

- jest samopodobny, jeśli nie w sensie dokładnym, to w przybliżonym lub stochastycznym
- struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej
- jego wymiar geometryczny nie jest liczbą całkowitą
- ma względnie prostą definicję rekurencyjną
- ma naturalny wygląd („poszarpany”, „kłębiasty”, „szorstki”, „drzewiasty” itp.

W literaturze przedmiotu podaje się wiele przykładów fraktali geometrycznych lub multifraktali (powielających się struktur typu drzewo, polimery, chmury) pochodzących od ich twórców, np.: krzywe Giuseppe Peana (1890), Dawida Gilberta (1891), Helge von Kocha (1904), zbiory Georga Cantora (1872), Gastona Julii (1918), Felixa Hausdorffa (1919). trójkąt lub dywan Wacława Sierpińskiego (1916). Można powiedzieć, że nie jest to zagadnienie nowe, przynajmniej w świecie matematyki. Ale dopiero prace Benoita Mandelbrota w latach 1950-80, które zbiegły się z rozwojem techniki komputerowej, zaowocowały wielkim zainteresowaniem świata naukowego tej dyscypliny wiedzy i wykorzystaniem ich wyników w praktyce niemal wszystkich dziedzin życia⁵.

4 W oryginale: “The application of scientific methods and engineering techniques to the exploitation and use of natural resources”.

5 Warto przypomnieć, że fraktalną naturę świata biologicznego i fizycznego zauważył już w 1917 roku D’Arcy Thompson w swojej fundamentalnej pracy „O wzroście i kształtach”, gdzie m.in. stwierdził, że

Ogólnie biorąc fraktale to obiekty dowolnej natury, których struktura jest obrazem stworzonym na swoje podobieństwo (samopodobnym). Inaczej mówiąc obiekt wielkich rozmiarów jest podobny do jego mniejszych elementów (lub odwrotnie) niezależnie od skali obserwacji.



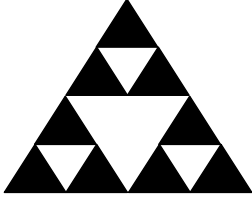
W procesach wzrostu (dyfuzji) otrzymujemy agregaty podobne do elementów podstawowych, ale ta zasada może mieć ograniczenia. Ten model wzrostu nazwany został przez Wittena i Sandlera (1982) jako agregacja ograniczonego wzrostu (diffusion limited aggregation - DLA).

MIARY, STADIA I LICZBA PODOBIENSTWA FRAKTALI

Fraktale dzieli się na geometryczne i stochastyczne. Fraktale geometryczne to struktury geometryczne powielające się w regularny sposób. Np. uszczelka Sierpińskiego (Tab.1) rośnie w wymiarze liczbowym z długością L (liczba trójkątów) w kolejnych stadiach wzrostu, ale jej gęstość (stosunek liczby czarnych obiektów do liczby całego pola) maleje wg schematu jak w tabeli (Stauffer, Stanley 1996)

Tabela 1. Przykład wzrostu agregatu („uszczelki”) Sierpińskiego i zmian jego gęstości w kolejnych krokach iteracji (stadiach wzrostu).

Table 1. The example of Sierpiński's "gasket" development and its density change in the growing process.

			
Stadium:	0	1	2
Długość L :	2^0	2^1	2^2
Pole $P(L)$	4^0	4^1	4^2
Masa $M(L)$	3^0	3^1	3^2
Gęstość $\rho(L)=M(L)/P(L)$	$(3/4)^0$	$(3/4)^1$	$(3/4)^2$

mimo dużej przypadkowości struktur lub procesów na niskich poziomach zorganizowania w wymiarze makroskopowym wykazują one już wysoki stopień uporządkowania.

Jak widać z powyższego przykładu wzrost agregatu i jego właściwości zmieniają się zgodnie z prawem potęgowym

$$y = A \cdot x^D \quad (1)$$

gdzie: x jest skalą agregatu,

$x = f(s)$ - jest zmienną ilościową lub jakościową, będącą funkcją pewnej zmiennej s , która z kolei może być po prostu stadium procesu wzrostu mierzonego dowolną miarą jakościową lub ilościową jak we wzorze (5).

y - jest obserwowaną wielkością (długość, objętość, energia, koszt itp.),

A - amplituda funkcji zależna od wyboru miary,

D - wykładnik równania, który jest nachyleniem prostej wykreślonej w układzie logarytmicznym

$$D = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} \quad (2)$$

Ogólne równanie geometrii fraktalnej przedstawiane jest w formie równania (Kwaśniewski, Wang 1995)

$$y_x = y_0 \cdot x^{E-d_f} \quad (3)$$

co ściśle odpowiada równaniu potęgowemu gdy $y_0 = A$ oraz $D = E - d_f$, gdzie wykładnik d_f nazywamy liczbą fraktalną, albo liczbą podobieństwa, a E - oznacza wymiar euklidesowy: W 3-wymiarowej przestrzeni euklidesowej (III w. pne) punkt ma wymiar 0, linia -1, pole -2, objętość -3. Stąd dla uszczelki Sierpińskiego zmiany gęstości (obliczone z powierzchni) jako funkcja długości boku trójkąta $\rho(L)$ przedstawione w układzie logarytmicznym jest linią prostą o nachyleniu $D \cong 0.42$. Zatem liczba fraktalna d_f w tym wypadku wynosi $2 - 0.42 = 1.58$.

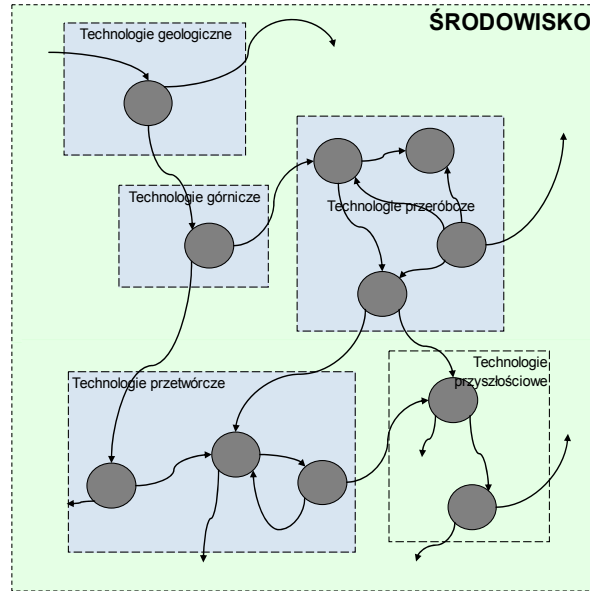
Różne obiekty dla tej samej miary mogą mieć różne wartości liczby fraktalnej. Przykładem mogą być zmiany długości linii brzegowych Anglii i Norwegii. W tym wypadku, jak obliczono, liczba fraktalna wynosi odpowiednio: 1.25 i 1.52. (Kwaśniewski, Wang 1995)

FRAKTALNA- GEOTECHNOLOGIA

Rzeczywiste układy jakie mamy w przyrodzie nie są uporządkowane tak jak wcześniej wspomniane fraktale geometryczne. Na przykład rozpad konkretnej cząstki na mniejsze rozmiary pod wpływem działania siły jest niepodobny do innego, ale już

średnie ziarna albo względne wymiary ziarn w produktach rozpadu w podobnych eksperymentach mogą być przewidywalne wg prawa podobieństwa.

Innym przykładem będzie wykorzystanie surowca mineralnego w kolejnych technologiach separacji składników użytecznych. Są to struktury drzewiaste lub kłębiaste, charakterystyczne dla struktur technologicznych, których rozwój ma wszelkie cechy procesu stochastycznego, a rozrost gałęzi drzewa technologicznego nie jest nigdy równomierny i zgodny z pozostałymi.



Rys. 1. Fraktalna koncepcja rozwoju technologii surowcowych

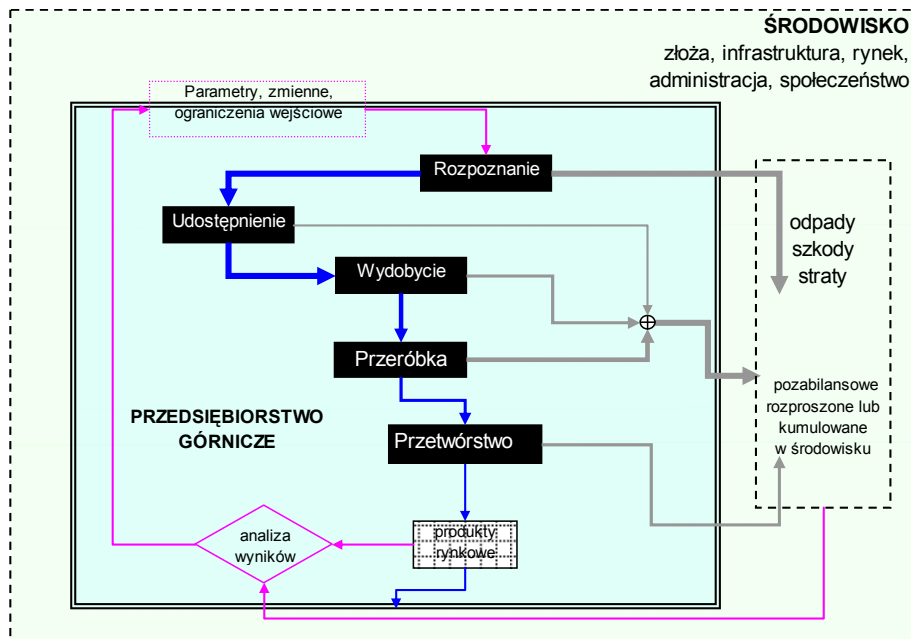
Fig.1. A pattern of the geotechnological fractal development

Przyczyny tego leżą w aktualnym stanie nauki, techniki i ekonomii, które mogą stymulować lub hamować rozwój technologii w odpowiednim kierunku. Przykładem na to może być produkcja metali ze złoża polimetalicznego. Rozwój techniki i zapotrzebowanie na nowe pierwiastki stymuluje rozwój odzysku tych pierwiastków z dzisiejszych odpadów, a odkrycia inżynierii materiałowej mogą zahamować popyt na aktualnie dominujący w zastosowaniach metal, itd.. Ilustracją na to jest rysunek 1. Można zapewne stworzyć regułę wzrostu takiego fraktala wprowadzając do niej odpowiednie zmienne stochastyczne. Zapewne jest to bardzo interesujący kierunek badawczy, ale w tym artykule ograniczymy się jedynie do przykładów, które mogą być przedmiotem bardziej szczegółowych badań i opisów w przyszłości.

Innym przykładem jest przedsiębiorstwo górnicze, którego produkcja oparta jest na technologii jak na rysunku 1 i które składa się z oddziałów specjalizujących się w technologiach szczegółowych: rozpoznania i udostępnienia złoża, wydobycia i prze-

róbki kopaliny, przetwórstwa koncentratów. Rysunek 2. przedstawia strukturę takiego przedsiębiorstwa

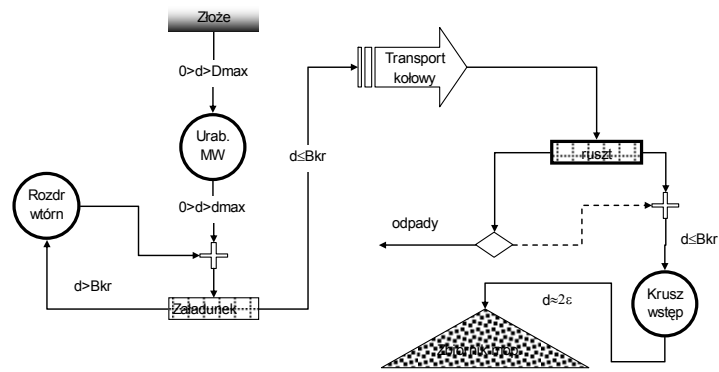
Każdy z oddziałów (stadiów) operacji technologicznych jest pewną makrooperacją separacji, której produktami są produkt główny (pożądany) i odpadowy (uboczny). Jeśli zajrzemy do „wnętrza” tej operacji to stwierdzamy, że jej struktura składa się z zespołu podobnych operacji separacji, z których każda również ma dwa produkty - bardziej i mniej wartościowy. Rysunek 3 jest takim przykładem rzeczywistej struktury technologii przeróbki (wzbogacania) rudy gdzie widzimy, że końcowymi produktami tej technologii jest koncentrat (Kk-koncentrat końcowy) oraz odpady poflotacyjne (Ok.-odpady końcowe). Podobnie wygląda technologia wydobywania i przeróbki skał (rys.4). Zatem całość jest podobna do jego części, a więc spełniony jest tu jeden z głównych postulatów fraktala - samopodobieństwo.



Rys. 2 Technologia produkcji miedzi jako technologiczny fraktal

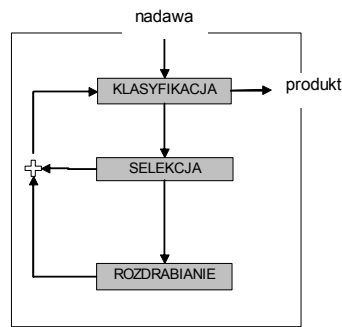
Fig. 2. Technology production of the copper as technological fractal

Analizując technologię pokazaną na rysunkach 3 i 4 można mieć wątpliwości co do operacji rozdrabiania, z której mamy jeden produkt operacji. Można jednak pokazać, że jest to tylko wynik bardziej złożonej operacji ze sprzężeniem zwrotnym (Drzymała, 2009). Przykładem na to jest model Whitena (1974) maszyny rozdrabiającej przedstawiony na rys. 5. Właśnie sprzężenia zwrotne w takich układach powodują, że technologie te w sensie topologicznym mogą się różnić „gęstością”/złożonością technologii, jeśli tę gęstość zmierzyć stosunkiem ogólnej liczby zainstalowanych operacji do



Rys. 4. Typowa struktura technologii wydobycia i wstępnej przeróbki kopaliny w górnictwie skalnym.

Fig. 4. The typical structure of the quarrying and processing technology



Rys.5. Model Whitena maszyny rozdrabiającej
Fig.5. Whiten's model of comminution machine



Rys. 6. Zbiór Cantora

Fig. 6. The set of Cantor

PRZYKŁADY FRAKTALI GEOTECHNOLOGICZNYCH I ICH LICZBY FRAKTALNE

Jak już powiedzieliśmy na początku fraktale mogą mieć dowolną naturę. W geotechnologii jest to operacja eksploatacji zasobów i ich przetwarzania do postaci surowca dla przemysłu towarów i usług. Z technologicznego punktu widzenia jest to obiekt materialny lub niematerialny, którego zadaniem jest zmiana jakości i/lub ilości materii wpływającej do takiego obiektu do postaci żądanej przez odbiorcę. Produkty takiego obiektu na etapie (stadium) o numerze s generują następne stadium $s+1$ tak długo jak jest to potrzebne i opłacalne. Ten mechanizm rekurencyjny prowadzi do rozwoju struktury pewnej technologii, czyli fraktala technologicznego, którego efekt działania powinniśmy móc przewidywać i analizować na różnych stadiach rozwoju technologii zgodnie z równaniem (3).

Przyjmijmy dalej, że każda pojedyncza operacja - obiekt w strukturze technologicznej w sensie topologicznym jest punktem, czyli jego wymiar euklidesowy $E = 0$. Wtedy równanie (3) jest równoważne równaniu (1), a więc ilość $y(s)$ mierzona np. miarą kosztów produkcji, ceny, energii, stopnia rozdrobienia itp.) na etapie/stadium s jest równaniem regresji, w którym współczynnik podobieństwa $d_f = D$ jest nachyleniem prostej wpisanej w wartości empiryczne.

Niżej przedstawiamy przykładowe analizy niektórych technologii, które zapewne można mnożyć niemal dowolnie. Dane użyte nie są precyzyjne, ale ta dokładność jest wystarczająca, jak się zdaje, do potwierdzenia poprawności tytułowej hipotezy, ponieważ obserwujemy w tych przykładach dostatecznie dobre dopasowanie modelu do danych empirycznych.

W tabelach 2 do 5 i rysunkach 7 do 10 pokazano przykłady geotechnologii, które wykazują zadziwiającą prawidłowość zależności efektu technologii od jej rozmiaru. W tych przykładach zbadano zależność efektu działania agregatu technologicznego od jego rozmiaru (liczby stadiów) s i opisano równaniem typu

$$y = A \cdot e^{s \cdot D}, s = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Zauważmy, że będzie to równanie potęgowe (1) jeśli wykonamy następujące przekształcenia

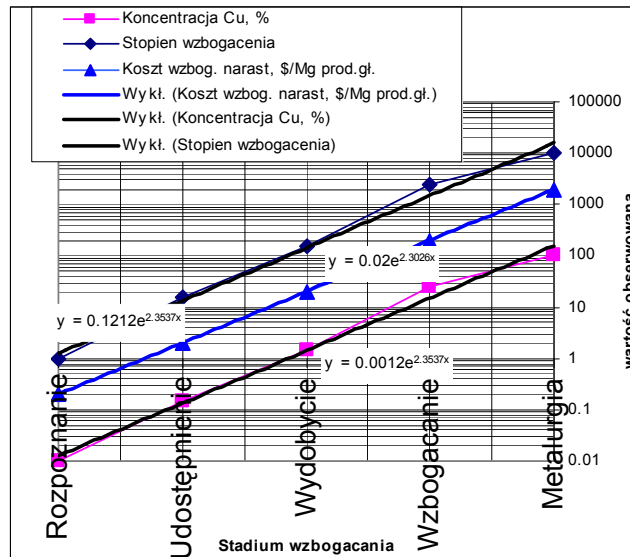
$$y = A \cdot x^D = A \cdot (e^s)^D, s\text{-stadium procesu} \quad (5)$$

Wykreślając tę funkcję dla różnych miar efektu technologii w funkcji skali/stadium procesu rozwoju jej struktury otrzymujemy wyniki jak na kolejnych rysunkach i w tabelach, gdzie współczynnik podobieństwa $d_f = D$ w prezentowanych przykładach zmienia się w granicach 0.5-2.3.

Tabela 2. Przykłady technologii wzbogacania miedzi - wzrost wartości produktu wzbogacania zależny od rozwoju technologii

Table 2. Examples of copper processing technology – growth of the product beneficiation depended on technology development

Produkt	Koncentracja Cu, %	Stopień wzbogacenia	Szacunkowy koszt uzysku narast, \$/Mg produktu głównego	Stadium
Skorupa ziemi	0.01	1	0.2	Rozpoznanie
Złoże	0.15	15	2	Udostępnienie
Ruda	1.5	150	20	Wydobycie
Koncentrat	25	2500	200	Wzbogacanie
Metal	100	10000	2000	Metalurgia
A	0.0012	0.12	0.02	
D	2.35	2.35	2.303	
$D^* = \Delta \log(y) / \Delta \log(x)$	2.30	2.30	2.30	

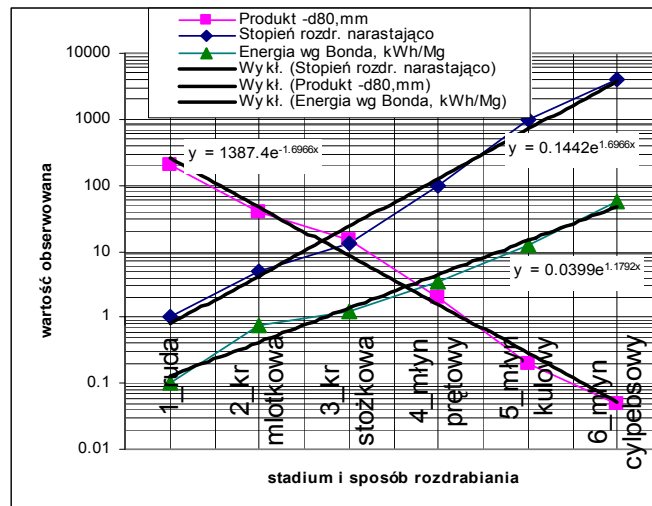


Rys.7. Zmiany jakości i ciągnione koszty produkcji miedzi

Fig. 7. Dependence of copper production costs on the stage of production

Tabela 3. Przykład technologii rozdrabniania rud
 Table 3. Example of technology of ore size reduction

Stadium i produkt technolo- gii rozdrabniania rud	Produkt - d_{80}, mm	Stopień rozdrabniania - narastająco	Energia wg Bonda kWh/Mg
1_ruda (produkt urabiania)	200	2	0.10
2_kruszarka młotkowa	40	5	0.75
3_kruszarka stożkowa	15	13.3	1.23
4_młyn prętowy	2	100	3.41
5_młyn kulowy	0.2	1000	12.60
6_młyn cylpepsowy	0.05	4000	57.72
A	1387	0.144	0.04
D	-1.697	1.697	-1.179
$D^* = \Delta \log(y) / \Delta \log(x)$	-1.66	1.66	1.27



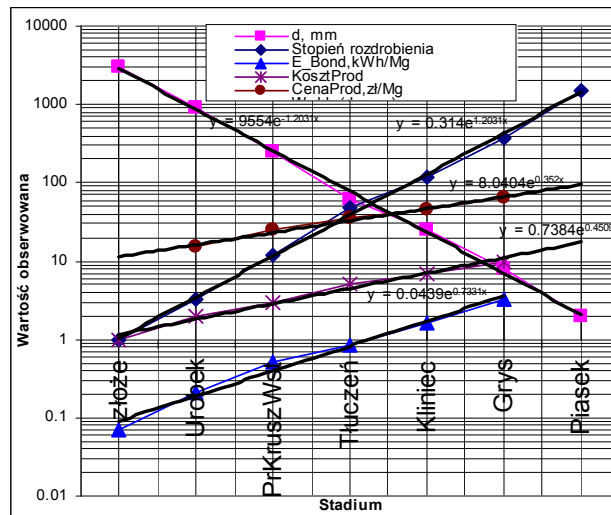
Rys.8. Zmiany uziarnienia i energochłonność operacji rozdrabniania w kolejnych stadiach i maszynach (energochłonność całej technologii wynosi ok. 20 kWh/Mg rudy)

Fig.8. Changes of ore product size and energy consumption of comminution in the sequential stages of technology

Tabela 4. Przykłady technologii, energochłonności, kosztów własnych i cen produktów przeróbki skał.

Table 4. Examples of the crushing and screening technology in term of grindability, production cost and price of the final products.

Stadium	d,mm	Stopień rozdrobienia	Energia wg Bonda kWh/Mg	Szacunkowy koszt produkcji zł/Mg	Cena produktu zł/Mg
1 złoże	3000	1	0.000	1	
2 Urobek	900	3	0.072	2	15
3 PrKruszWst	250	12	0.213	3	25
4 Tłuczeń	63	48	0.511	5	35
5 Kliniec	25	120	0.862	7	45
6 Grys	8	375	1.590	10	65
7 Piasek	2	1500	3.267		
A	9554	0.314	0.044	0.738	0.040
D	-1.203	1.203	0.733	0.451	0.352
D*= $\Delta\log(y)/\Delta\log(x)$	-1.22	1.22	0.76	0.40	0.37



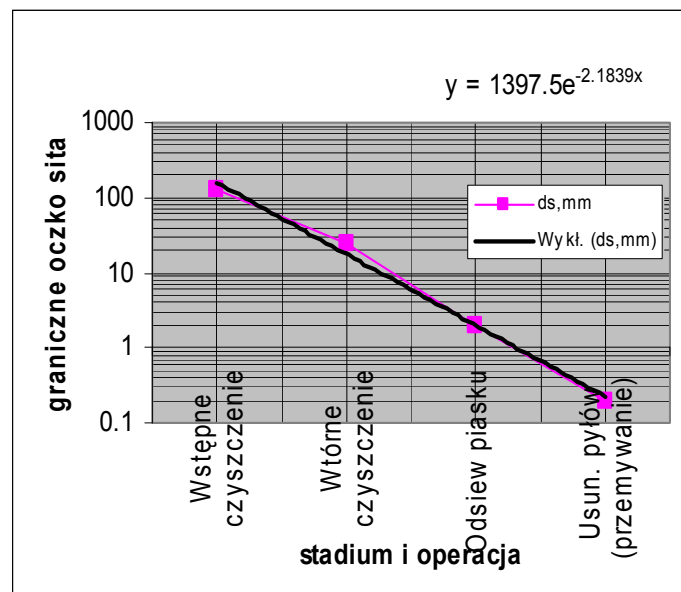
Rys.9. Przykłady skali i obserwowane w praktyce szacunkowe wartości technologii produkcji surowców skalnych

Fig. 9 Examples of size reduction, grindability, costs production and price of the final products.

Tabela 5. Przykład technologii czyszczenia przez odsiewanie mniej wartościowych lub szkodliwych składników produktów finalnych

Table 5. Example of material cleaning by screening in sequential stages of the process.

Stadium	Operacja	Oczko sita d_s, mm
1	Wstępne czyszczenie	125
2	Wtórne czyszczenie	25
3	Odsiew piasku	2
4	Usuw. pyłów (przemywanie)	0.2
	A	1397
	D	-2.18
	$D^* = \Delta \log(y) / \Delta \log(x)$	-2.15

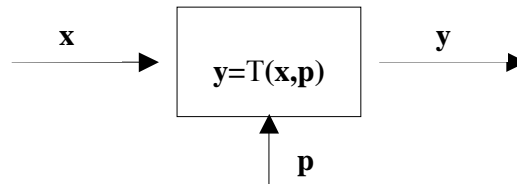


Rys.10. Ilustracja skali i jakości technologii przesiewania

Fig. 10. A view on change of size and quality of screening technology in sequential stages of the process.

INFORMACYJNY MODEL FRAKTALA TECHNOLOGICZNEGO

Jak już pokazano wcześniej każdy agregat technologiczny można zredukować do pojedynczej (makro)operacji co pozwala zaproponować koncepcję modelu informacyjnego takiej operacji jak na rysunku 11, gdzie wyjście y jest funkcyjnie zależne od zmiennych x oraz parametrów operacji p . T jest funkcją lub algorytmem transformacji x w y . Złożoność operatora T zależy od rozmiarów systemu (wielkości fraktala) oraz dokładności informacji jaką chcemy uzyskać na wyjściu. (Malewski 2008)



Rys. 11. Informacyjny model fraktala geotechnologicznego

Fig. 11. The information model of the geotechnological fractal

Powyższe ujęcie geotechnologii jako fraktala znacznie ułatwia jej modelowanie, ponieważ efektywność każdej operacji, niezależnie od jej rodzaju i złożoności, opisuje para równań:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\text{operacja}) &= f(\alpha, \beta, p, Q) \\ K(\text{operacja}) &= f(\varepsilon, p, Q) \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: α - udział wyróżnionego składnika w nadawie,
 β - udział składnika w produkcie głównym,
 ε - uzysk składnika w produkcie głównym,
 Q - natężenie strumienia,
 p -parametry operacji,
 K -koszty własne operacji.

Te informacje pozwalają wykonać obliczenia natężenia i zawartości składników w każdym strumieniu operacji /fraktala oraz oszacować efekty ekonomiczne realizacji dowolnych rozmiarów technologii. Problemem oczywiście jest identyfikacja takiego modelu w technologiach szczegółowych (operacjach), co jest zadaniem dla technologów, informatyków, fizyków, ekonomistów, czyli specjalistów sektora B+R geotechnologii. Właśnie fraktalna natura geotechnologii pozwala zadanie to uprościć do postaci (11), albowiem jak mówi Stephen Wolfram (2002) „nawet najbardziej skompli-

kowane zjawiska występujące w naturze ożywionej i nieożywionej wyjaśnić można prostymi mechanizmami, a dowolnie złożony efekt można uzyskać przez zastosowanie odpowiednio prostego algorytmu”.

LITERATURA

- AHMED H.A.M., DRZYMAŁA J., *Two-dimensional fractal linearization of distribution curves*, Physicochemical Problems of Mineral Processing, 39,2005.
- BATTY M, LONGLEY P., *Urban growth and form: scaling, fractal geometry, and diffusion-limited aggregation*, Environment and Planning A. 1989, volume 21.
- DRZYMAŁA J., *Mineral processing*, Wrocław University of Technology, 2007
- KWAŚNIEWSKI M., WANG J., *O fraktalnym charakterze powierzchni ścianek spękań w skałach*, XVIII Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej, Szklarska Poręba 1995.
- MALEWSKI J., *Zarządzanie produkcją – kluczową technologią rozwoju przemysłu wydobywczego rud miedzi i surowców towarzyszących*, Cuprum, 1/2008
- STAUFFER D., STANLEY H.E., *Od Newtona do Mandelbrota – wstęp do fizyki teoretycznej*, WNT, Warszawa 1996.
- URBAŃSKI J., *GIS w badaniach przyrodniczych*, e-book, 2012
- WHITEN W.J., *A matrix theory of comminution machines*, Chem. Eng. Sci, 1974, vol 29.
- WITTEN T.A. SANDER L.M., *Diffusion-limited aggregation*, Physical Review B, v.27 nr 9, 1982
- WOLFRAM S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002

Geotechnology, fractals, modeling

ON FRACTAL NATURE OF GEOTECHNOLOGY

A fractal description of raw materials technology named as geotechnology, is presented in the paper. Development of such technology can be made by multiplying separation operations, so obtained pattern of technology is similar to each other, independently on size of the system. It is shown that product of technology system, if measured in technology or economical units, strongly depends on the stage of the process, therefore fundamental fractal equation can be adapted to evaluate of self-similarity coefficient of such fractals. A some numerical example are performed and presented for illustrate of the problem. At the end of the subject the information model of the geotechnological fractal is proposed.