

*wydajność ujęć wód eksploatowanych samoczynnie,  
metoda identyfikacji modelu ARMAX, wody lecznicze*

Arkadiusz LIBER\*, Elżbieta LIBER\*\*

## **ANALIZA WYDAJNOŚCI UJĘĆ WÓD Z SAMOWYPŁYWEM PRZY UŻYCIU LINIOWEJ IDENTYFIKACJI MODELU ARMAX**

W pracy przedstawiono wyniki badań autorów w zakresie modelowania zmienności wydajności ujęć wód leczniczych z samowypływem. W modelowaniu zastosowano liniową identyfikację ARMAX. Jako dane wejściowe zastosowano wyniki pomiarów wydajności ujęcia Jerzy w Łądku Zdroju w latach 1997-2003. Otrzymane wyniki porównano z wynikami modelowania ujęcia Jerzy przy użyciu sieci neuronowych GRNN oraz modelowania falkowego. Uzyskane rezultaty wskazują na możliwość zastosowania liniowej identyfikacji modelu ARMAX w badaniach hydrogeologicznych, w szczególności zaś w badaniach wydajności ujęć wód leczniczych. Otrzymywane rezultaty są podobne do rezultatów otrzymywanych przy użyciu sieci neuronowych GRNN.

### 1. WPROWADZENIE

Najczęściej stosowanymi metodami badania zmienności ujęć wód leczniczych są metody statystyczne (Liber-Madziarz, 2001). Metody te są proste w stosowaniu, nie dają jednak dobrych rezultatów w wykrywaniu zjawisk o charakterze lokalnym lub śladowym. W najnowszych badaniach ujęć stosuje się coraz częściej metody analizy spektralnej, metody wykorzystujące sieci neuronowe oraz metody wykorzystujące wielorozdzielczą analizę falkową (Liber i Liber-Madziarz, 2003 a,b,c,d). Możliwości prowadzenia badań eksperymentalnych przepływów wód podziemnych są ograniczone. Analiza przepływów oparta na bezpośrednim rozwiązywaniu analitycznym zagadnień dynamiki i statyki wód ma ograniczone zastosowanie ze względu na trudności w wyznaczeniu rzeczywistych geologicznych warunków brzegowych. Najnowsze metody badań ujęć wód leczniczych opierają się na sieciach neuronowych oraz na metodach wielorozdzielczej analizy falkowej. Jak pokazano w pracy (Liber, Liber-Madziarz, 2003 b,d) zastosowanie sieci neuronowych GRNN

---

\* Instytut Informatyki Stosowanej Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, e-mail: arkadiusz.liber@pwr.wroc.pl

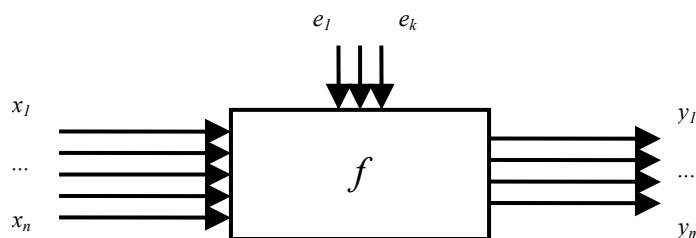
\*\* Instytut Górnictwa Politechniki Wrocławskiej, pl. Teatralny 2, 50-051 Wrocław, e-mail: elzbieta.liber@pwr.wroc.pl

pozwała na analizę wolnozmiennych zjawisk zachodzących w ujęciu wód, jak również umożliwia predykcję przyszłych zmian wydajności w okresie kilku lat. Dużo większe możliwości analizy zmienności ujęć wód z samowypływem daje wielorozdzielcza analiza falkowa. Analiza ta pozwala na wyznaczenie składowych wolnozmiennych sygnału reprezentującego ujęcie, lecz również umożliwia wykrywanie zjawisk lokalnych trudnych do wykrycia innymi metodami (Liber, Liber, 2004). Istotnym ograniczeniem metod falkowych (Zhang, 1995) i metod z wykorzystaniem sieci neuronowych jest krótki okres skutecznego wyznaczania zmian przyszłych wydajności ujęcia, wynoszący od roku do kilku lat.

W ramach pracy przeprowadzono analizę wydajności ujęcia Jerzy w Łądku Zdroju przy wykorzystaniu liniowej identyfikacji modelu ARMAX. Podejście takie jest rezultatem poszukiwań autorów w zakresie metod dających jak najlepszy opis zjawisk zachodzących w ujęciach wód leczniczych z samowypływem oraz jak najlepszą długoterminową predykcję zmian wydajności ujęcia.

## 2. MODEL ARMAX UJĘCIA WÓD LECZNICZYCH Z SAMOWYPŁYWEM

Rozważmy układ fizyczny o  $n$  wejściach i  $m$  wyjściach. Układ taki można symbolicznie przedstawić w postaci jak na rys. 1. Wejścia układu można traktować jako wektor  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , wyjścia jako wektor  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ . W ogólnym przypadku wektor wyjściowy  $\vec{y}$  związany jest z wektorem wejściowym  $\vec{x}$  oraz z wektorem zaburzeń  $\vec{e}$  pewną funkcją  $f$ .



Rys. 1. Ilustracja układu fizycznego o  $n$  wejściach i  $m$  wyjściach z uwzględnieniem dodatkowych zaburzeń reprezentowanych przez wektor  $k$  elementowy

Fig. 1. The illustration of the physical system about  $n$  entries and  $m$  exits with the regard of additional disturbances represented by the  $k$  elements vector

W przypadku ujęć wód rozpatrywanych w niniejszej pracy wektor wyjściowy może reprezentować mierzalne wielkości fizyczne (np. wydajność) związane z poszczególnymi punktami samowypływu na zadanym obszarze hydrogeologicznym. Wektor  $\vec{x}$  może reprezentować mierzone wielkości fizyczne wpływające na wektor  $\vec{y}$ . Wewnętrzne oddziaływania płynących wód podziemnych z otoczeniem są z reguły niemierzalne lub trudno mierzalne i można je traktować jako pewne zaburzenie  $\vec{e}$ .

Postawiony w ten sposób model jest tak zwanym modelem czarnej skrzynki, w którym dysponujemy tylko pomiarami wielkości  $\bar{x}$  oraz wielkości  $\bar{y}$  w zadanym przedziale czasu. Funkcja  $\bar{y} = f(\bar{x}, \bar{e}, t)$ , gdzie  $t$  jest czasem określa dynamikę rozpatrywanego układu. Dla modelu liniowego związek operatorowy pomiędzy wektorem wejściowym a wektorem wyjściowym można przedstawić w postaci zależności:

$$\bar{y} = \hat{G}\bar{x} + \hat{H}\bar{e}, \quad (1)$$

gdzie:  $\hat{G}, \hat{H}$  są pewnymi operatorami liniowymi (np. operatorami różniczkowymi) w przestrzeni wektorowej (Sonderstrom, Stoica, 1989).

Wody lecznicze są najczęściej wodami o długim czasie krążenia. Konieczne jest, więc stosowanie modeli uwzględniających znaczne opóźnienia w oddziaływaniach. Opóźnienia można wprowadzić przez zadanie opóźnień czasowych  $n_{ki}$ . Dla układu z pojedynczym wyjściem uwzględniającego opóźnienia można wprowadzić funkcję zawierającą wielomiany operatora przesunięcia  $q$ :

$$A(q)y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{B_i(q)}{F_i(q)} x_i(t - n_{ki}) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t), \quad (2)$$

gdzie:  $A, B_i, C, D, F_i$  są wielomianami operatora przesunięcia  $q$ .

Model ARMAX (Auto Regressive Moving Average with auxiliary input) stanowi uproszczenie modelu ogólnego zadanego równaniem (2). Równanie (2) przyjmuje tu postać:

$$A(q)y(t) = B(q)x(t - n_k) + C(q)e(t). \quad (3)$$

Operator przesunięcia  $q$  de facto służy do uproszczonego zapisu równań różnicowych występujących w modelu (1). Jawna postać równań dla modelu ARMAX określona jest zależnością:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{na} y(t-na) = b_1 x(t-nk) + \dots + b_{nb} x(t-nk-nb+1) + \dots + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{nc} e(t-nc) \quad (4)$$

gdzie:  $na, nb, nc, nk$  – parametry modelu. W praktyce wielomian  $A(q)$  identyfikuje bieguny modelu dynamicznego badanego ujęcia wody.

### 3. NUMERYCZNA ANALIZA MODELU DLA UJĘCIA WODY LECZNICZEJ Z SAMOWYPLYWEM

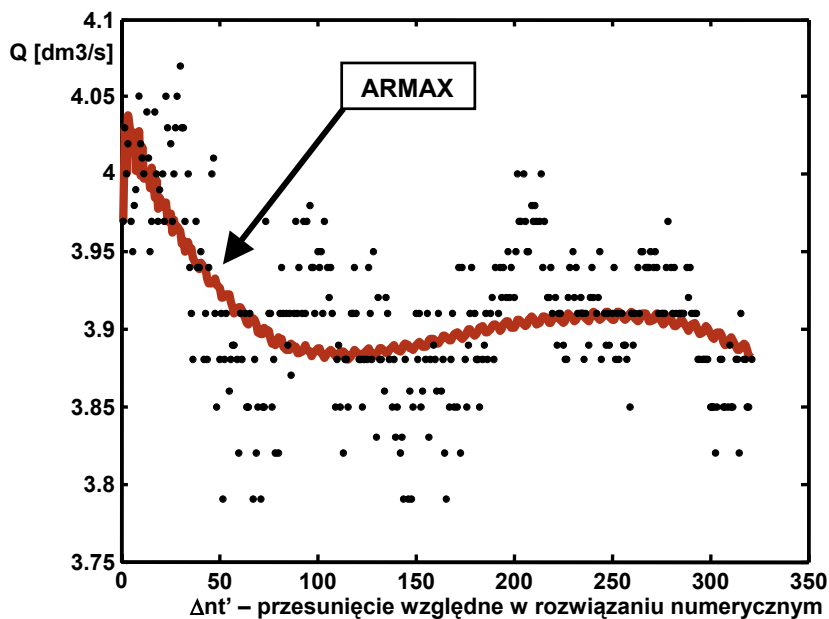
W ramach pracy przeprowadzono analizę ujęcia wody leczniczej Jerzy w Łądku Zdroju przy wykorzystaniu modelu ARMAX. Wybór ujęcia do analizy podyktowany był zgromadzeniem dużej ilości dokładnych pomiarów wydajności dla tego ujęcia oraz możliwością porównania otrzymanych rezultatów z rezultatami modelowania

ujęcia przy wykorzystaniu innych metod (Liber-Madziarz, 2001), (Liber, Liber-Madziarz, 2003).

Do obliczeń numerycznych wybrany został zbiór wyników pomiarów wydajności dla ujęcia Jerzy wykonanych w latach 1997-2003. Same obliczenia dla modelu ARMAX wykonane zostały metodą predykcji błędu (Ljung, Gład, 1994) przez wyznaczenie estymatorów operatorów  $\hat{G}$ ,  $\hat{H}$  występujących w zależności (1):

$$[G, H] = \min \sum_{t=1}^N e^2(t) = \min \sum_{t=1}^N (H^{-1}(q)(y(t) - G(q)x(t)))^2. \quad (5)$$

Na rys. 2 przedstawiono wyniki analizy wydajności ujęcia wód leczniczych Jerzy w Łądku Zdroju przy wykorzystaniu modelu ARMAX dla kryterium najlepszego dopasowania symulacyjnego dla wartości parametrów:  $na=6$ ,  $nb=3$ ,  $nc=9$ ,  $nk=6$ . Wielomiany operatora przesunięcia dla prezentowanego rozwiązania zestawiono w tabeli 1.



Rys. 2. Wyniki analizy wydajności ujęcia wód leczniczych Jerzy w Łądku Zdroju przy wykorzystaniu modelu ARMAX dla kryterium najlepszego dopasowania symulacyjnego dla wartości parametrów:  $na=6$ ,  $nb=3$ ,  $nc=9$ ,  $nk=6$

Fig. 2. Results of the analysis of the discharge of the intake of curative waters Jerzy in Łądek Zdrój with use the ARMAX model for the criterion of the simulatory best fit for the value of parameters:  $na=6$ ,  $nb=3$ ,  $nc=9$ ,  $nk=6$

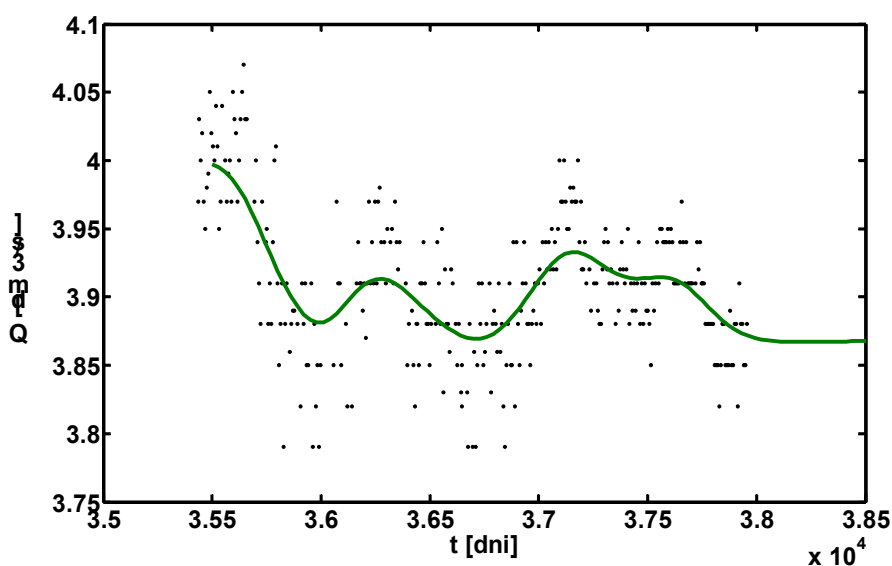
Analizując przedstawione na rys. 2 rozwiązanie można zaobserwować, że oddaje ono dobrze tendencję zmian wydajności ujęcia. Dla porównania na rys. 3 przedstawiono wynik modelowania zmian wydajności ujęcia Jerzy przy użyciu sieci neuronowej GRNN (Liber, Liber-Madziarz, 2003a). Widoczne jest, że przedstawione na rys. 3 rozwiązanie wykazuje większą zmienność niż rozwiązanie otrzymane w wyniku wyznaczenia modelu liniowego metodą ARMAX.

Tabela 1

Zestawienie wielomianów operatora przesunięcia dla rozwiązania przedstawionego na rys. 2

Wielomian	Postać wielomianu
$A(q)$	$1-1.368q^{-1}-0.3024q^{-2}+1.483q^{-3}-0.6913q^{-4}-1.008q^{-5}+0.8864q^{-6}$
$B(q)$	$-7.152e-005q^{-6}+0.0001582q^{-7}-8.672e-005q^{-8}$
$C(q)$	$1-0.8088q^{-1}-0.4255q^{-2}+0.8933q^{-3}-0.21q^{-4}-0.7224q^{-5}+0.4246q^{-6}+0.1384q^{-7}-0.1093q^{-8}-0.2052q^{-9}$

Porównując otrzymany rezultat z wynikami otrzymanymi w pracy (Liber, Liber-Madziarz, 2003) dla modelowania falkowego można stwierdzić, że modelowanie falkowe daje możliwość lepszej identyfikacji szczegółów na czasowej zależności wydajności ujęcia Jerzy.



Rys. 3. Wyniki analizy wydajności ujęcia wód leczniczych Jerzy w Łądku Zdroju przy wykorzystaniu sieci neuronowej GRNN dla poziomu  $l=150$

Fig. 3. Results of the analysis of the discharge of the intake of curative waters Jerzy in Łądek Zdrój with use the GRNN neural network with level  $l=150$

#### 4. WNIOSKI

W ramach pracy przeprowadzono analizę możliwości zastosowania metody identyfikacji modelu liniowego ARMAX. Wykonane w ramach pracy obliczenia numeryczne wskazują na bardzo interesujące własności prezentowanego podejścia. Przy użyciu modelowania ARMAX uzyskuje się dobre dopasowanie wyników eksperymentalnych do wyliczonego modelu symulacyjnego. Przewiduje się rozszerzenie prowadzonych badań na wykorzystanie modelowania ARMAX do predykcji zmian wydajności ujęć eksploatowanych samoczynnie w przyszłych okresach czasu.

#### LITERATURA

- LIBER A., LIBER-MADZIARZ E., *Analiza falkowa wydajności ujęć wód leczniczych w Łądku Zdroju*. Współczesne Problemy Hydrogeologii. Gdańsk, t.XI, cz.1. 377-380, 2003a.
- LIBER A., LIBER-MADZIARZ E., *GRNN Modeling of Discharge of Curative Water Intakes in Szczawno Zdrój*. AI-METH 2003. Artificial Intelligence Methods. November 5-7, Gliwice Poland, 2003b.
- LIBER A., LIBER-MADZIARZ E., *Nowe metody badania wydajności ujęć eksploatowanych samoczynnie na przykładzie wód leczniczych w Sudetach*, Współczesne Problemy Hydrogeologii. Gdańsk, t.XI, cz.1. 381-388, 2003c.
- LIBER A., LIBER-MADZIARZ E., *Modelowanie wydajności ujęć termalnych wód leczniczych eksploatowanych samoczynnie w Łądku Zdroju przy zastosowaniu sieci neuronowych*. II Krajowe Sympozjum Modelowanie i Symulacja Komputerowa w Technice. Łódź. 111-114, 2003d.
- LIBER A., LIBER E., *Falkowe metody modelowania warunków hydrologicznych ujęć wód leczniczych z samowypływem*. Acta Universitatis Wratislaviensis. Hydrogeologia (w druku), 2004.
- LIBER-MADZIARZ E., *Zmienność wydajności wód leczniczych eksploatowanych samoczynnie ze złóż sudeckich*. Praca doktorska. Raporty Inst. Gór. Ser. PRE nr 3. Politechnika Wroclawska, 2001.
- LJUNG L., GLAD T., *Modeling of Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1994.
- SODERSTROM T., STOICA P., *System Identification*, Prentice Hall International, London, 1989.
- ZHANG Q., *Wavelets and regression analysis*, Wavelets and Statistics, Springer Verlag, New York, 1995.

*discharge of artesian waters intakes  
method of identification of ARMAX model, medicinal waters*

#### THE ANALYSIS OF INTAKES DISCHARGE OF OUTFLOWS WATERS WITH USE OF THE LINEAR IDENTIFICATION OF THE ARMAX MODEL

Paper presents the results of modelling the variability of discharge of medicinal waters with outflow. Linear identification of ARMAX model was used. Results of measurements of intake Jerzy (Łądek Zdrój) discharge from the 1997 - 2003 period were used as input data. Received results were compared with the results of modelling of intake Jerzy with usage of GRNN neural networks and wavelet modelling. Obtained results indicates possibilities of linear identification of ARMAX model usage in hydrogeological research, especially in medicinal waters discharge. Results are comparable with those obtained by neural networks GRNN usage.